XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Первый тур. 23.09.2024.

1. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a+2b = 3b+4c = 5c+6a$. Докажите, что $a+b+c$ делится на 35.

2. Найдите такое наименьшее натуральное N, что числа от 2 до N можно разбить на непересекающиеся группы так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы.

3. По n коробкам как-то разложены n^2 конфет. За один ход можно взять две коробки, содержащие суммарно чётное число конфет, и разложить эти конфеты поровну в эти коробки. При каких натуральных n за несколько ходов заведомо можно разложить конфеты поровну по всем n коробкам?

4. Найдите все натуральные числа n со свойством: число n увеличивается на 518221, если к нему приписать слева и справа цифру 5.

5. Сто студентов написали за полугодие 5 контрольных работ по математике. Студент не получает зачет по математике, если он написал хорошо не более двух контрольных работ. Какое наибольшее количество студентов могли не получить зачета, если оказалось, что в каждой контрольной ровно половина студентов показала хорошие результаты?

6. Пусть p — нечетное простое число, а целые числа a, b, c таковы, что числа $a^{2023}+b^{2023}$, $b^{2024}+c^{2024}$, $a^{2025}+c^{2025}$ делятся на p. Верно ли, что каждое из чисел a, b, c делится на p?

7. Найдите наибольший угол треугольника ABC, если известно, что в него можно вписать равнобедренный треугольник, основание которого — средняя линия треугольника ABC, а вершина делит сторону, на которой она лежит, на отрезки, один из которых втрое больше другого.

8. На клетчатой плоскости живут 20 ёжиков. Каждый ёжик поделил количество ёжиков, которые живут в той же строке, что и он, на количество ёжиков, которые живут в том же столбце, что и он (и там и там ёжик учитывает самого себя). Могли ли у всех ёжиков получиться разные результаты?

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

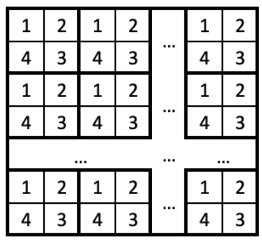
Старт-лига Первая. Первый тур. 23.09.2024.

1. Можно ли числа от 2 до 13 разбить на непересекающиеся группы так, чтобы в каждой группе одно число равнялось сумме остальных чисел этой группы?

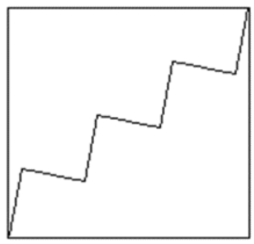
2. Учитель нарисовал на доске треугольник, длины сторон которого — последовательные натуральные числа. Паша вышел к доске и провел медиану этого треугольника, а Витя — биссектрису. Оказалось, что проведённые отрезки перпендикулярны. Найдите длины сторон треугольника.

3. Пусть p — нечётное простое число, а целые числа a, b, c таковы, что $a+b$, $b+c$, $a+c$ делятся на p. Докажите, что a, b, c делятся на p.

4. Доска 10×10 раскрашена в 4 цвета, как показано на рисунке (цифры обозначают цвета). Можно ли расставить на этой доске 10 не бьющих друг друга ладей так, чтобы на клетках первого цвета стояла одна ладья, на клетках второго — две, на клетках третьего — три, на клетках четвёртого — четыре ладьи?



5. В квадрате две противоположные вершины соединены семизвенной ломаной, как показано на рисунке. Все звенья ломаной имеют длину 1, соседние звенья перпендикулярны. Найдите площадь квадрата.



6. Найдите все натуральные числа n со свойством: число n увеличивается на 518221, если к нему приписать слева и справа цифру 5.

7. Двенадцать студентов написали за полугодие 5 контрольных работ по математике. Студент не получает зачет по математике, если он написал хорошо не более двух контрольных работ. Какое наибольшее количество студентов могли не получить зачета, если оказалось, что в каждой контрольной ровно половина студентов показала хорошие результаты?

8. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a+2b = 2b+3c = 3c+4a$. Докажите, что $\dfrac{a-b}{b-c} = -0,6$. (Дробь существует.)