XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 1. Юниор-лига высшая. 23.09.2024.

1. После длительной войны два вождя индейских племён решили раскурить трубку мира и сыграть в следующую игру: на доске 2024×2024 две противоположные угловые клетки покрашены в красный и синий цвета, вожди по очереди окрашивают бесцветные клетки, при этом первый вождь всегда красит клетки в синий цвет, а второй — в красный. Побеждает тот вождь, после хода которого соперник не сможет покрасить очередную клетку. Однако дым из трубки мира завис над доской, и вожди стали видеть лишь клетки своего цвета и клетки, граничащие с ними хотя бы по одной точке. Вождь никогда не станет красить клетку в свой цвет, если не уверен в том, что она не покрашена. Оба вождя знают все правила выше. Вождь, который должен ходить первым, чувствуя большое преимущество, даёт сопернику фору: первым своим ходом вождь, ходящий вторым, может покрасить 100 клеток подряд. Кто выиграет при правильной игре?

2. Пусть n — натуральное число. Каково наименьшее число m ($m > n$), при котором множество всех натуральных чисел от n до m (включительно) можно разбить на подмножества так, чтобы в каждом подмножестве одно из чисел равнялось сумме других чисел этого подмножества?

3. Остроугольный треугольник ABC имеет ортоцентр H. Точка A' диаметрально противоположна точке A на описанной окружности треугольника ABC. Точки P и Q — ортоцентры треугольников CHA' и BHA'. Докажите, что $\angle BAQ = \angle CAP$.

4. Пусть D — точка внутри треугольника ABC, Γ — его описанная окружность, а лучи BD, CD пересекаются с Γ в точках E, F соответственно. Γ_1, Γ_2 — описанные окружности треугольников ADE и ADF соответственно. Точка X на Γ_2 такова, что BX является касательной к Γ_2. Пусть BX снова пересекает Γ в точке Z. Докажите, что прямая CZ — касательная к Γ_1.

5. В стране есть несколько городов, часть из которых соединена двусторонними дорогами так, что из каждого города страны можно добраться до любого другого. Утром несколько машин выехали из некоторых городов в другие, а вечером вернулись обратно (возможно, по другому маршруту). Инспектор посчитал, сколько машин проехало по каждой дороге в ту и в другую сторону, и на тех дорогах, на которых эти числа различались, ввёл одностороннее движение в ту сторону, в которую проехало больше машин. Докажите, что если водители захотят проехать из того же пункта отправления в тот же пункт назначения и обратно, они смогут это сделать.

6. Пусть p — нечётное простое число, а a, b, c — целые числа такие, что числа $a^{2023} + b^{2023}$, $b^{2024} + c^{2024}$ и $a^{2025} + c^{2025}$ делятся на p. Докажите, что a, b, c делятся на p.

7. Докажите, что при каждом натуральном n среди первых n натуральных чисел, кратных трём, тех, в двоичной записи которых чётное число единиц, больше, чем тех, в двоичной записи которых нечётное число единиц.

8. Для положительных чисел a, b, c верно, что из отрезков длиной $a^{2024}, b^{2024}, c^{2024}$ можно составить треугольник. Докажите, что можно уменьшить одно из чисел a, b, c в 2024 раза и получить числа a', b', c' так, что из отрезков с длинами a', b', c' можно составить треугольник.

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 1. Юниор-лига первая. 23.09.2024.

1. По n коробкам как-то разложены n^2 конфет. За один ход можно взять две коробки, содержащие суммарно чётное число конфет, и разложить эти конфеты поровну в эти коробки. При каких натуральных n за несколько ходов заведомо можно разложить конфеты поровну по всем n коробкам?

2. Остроугольный треугольник ABC имеет ортоцентр H. Точка A' диаметрально противоположна точке A на описанной окружности треугольника ABC. Точки P и Q — ортоцентры треугольников CHA' и BHA'. Докажите, что $\angle BAQ = \angle CAP$.

3. Для целых a, b и c верно $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Докажите, что $a + b + c$ делится на 35.

4. В остроугольном треугольнике ABC с $CA = CB$ точка E лежит на описанной окружности ABC так, что $\angle ECB = 90°$. Прямая, проходящая через E параллельно CB, пересекает CA в точке F и AB в точке G. Докажите, что центр описанной окружности треугольника EGB лежит на описанной окружности треугольника ECF.

5. Для положительных чисел a, b, c верно, что из отрезков длиной $a^{2024}, b^{2024}, c^{2024}$ можно составить треугольник. Докажите, что можно уменьшить одно из чисел a, b, c в 2024 раза и получить числа a', b', c' так, что из отрезков с длинами a', b', c' можно составить треугольник.

6. Доска 10×10 раскрашена в 4 цвета квадратами 2×2 (см. фрагмент на рисунке, цифры обозначают цвета). Можно ли расставить на этой доске 10 не бьющих друг друга ладей так, чтобы на первом цвете стояла 1 ладья, на втором — 2, на третьем — 3, на четвёртом — 4 ?

1	2	1	2
4	3	4	3
1	2	1	2
4	3	4	3

7. Есть система точек на плоскости. Известно, что среди любых $2n$ точек $n+1$ лежит на одной прямой. Докажите, что все точки кроме, быть может, $n - 1$ лежат на одной прямой.

8. Сто кандидатов в космонавты прошли 5 тестовых испытаний. Кандидат не включается в группу космонавтов, если он показал плохие результаты более чем в половине испытаний. Какое наибольшее количество кандидатов могли быть отсеяны в этих испытаниях, если оказалось, что в каждом испытании ровно половина кандидатов показывала плохие результаты?