XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Второй тур. Гранд-лига. 24.09.2024.

1. Нечётные натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты. Для каждого натурального n положим
$$f(n) = \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{b}\right] + \left[\frac{n}{c}\right] + \left[\frac{n}{d}\right].$$
Докажите, что
$$\sum_{n=1}^{abcd} (-1)^{f(n)} = 1.$$

2. В правильном 1000-угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника. Докажите, что среди них есть не менее девяти различных по длине.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Внутри треугольников OAD и OBC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle OBY = \angle XAD$, $\angle ODX = \angle BCY$ и точки O, X, Y лежат на одной прямой. Оказалось,что точки A, B, C, D не лежат на одной окружности. Докажите, что $CY \parallel AX$.

   (К. Бельский)

4. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз и для любых трех последовательных чисел a, b, c число $a + c$ было кратно $b + 1$. Сможет ли он это сделать?

5. Для заданного натурального числа n рассматривается множество M всех отрезков вида $[l, r]$, где целые числа l и r удовлетворяют условию $0 \le l < r \le n$. Какое наибольшее число элементов из M можно выбрать так, чтобы каждый выбранный отрезок полностью содержал не более одного другого выбранного отрезка?

6. На плоскости надо отметить 2023 красных и 2023 синих точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пару чисел (a, b) назовём *хорошей*, если можно провести не проходящую через отмеченные точки прямую так, что с одной стороны от неё лежат ровно a красных и b синих точек. Найдите наименьшее возможное количество хороших пар.

   (М.Дидин, А. Семенов, из сюжета А. Тригуба)

7. Для каждого натурального числа $n \ge 3$ определим A_n и B_n как
$$A_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+3} + \cdots + \sqrt{n^2+2n-1}; \quad B_n = \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4} + \cdots + \sqrt{n^2+2n}.$$
Найдите все натуральные числа $n \ge 3$, для которых $[A_n] = [B_n]$.

8. Внутри вписанного семиугольника $A_1A_2 \dots A_7$ дана точка P. Оказалось, что основания перпендикуляров из P на стороны семиугольника лежат на одной окружности. Докажите, что центры семи описанных окружностей треугольников вида PA_iA_{i+1} тоже лежат на одной окружности.

9. Максим загадал многочлен $f(x)$ степени n. Саша хочет отгадать его (зная n). За ход Саша может назвать некоторый отрезок $[a, b]$, и Максим назовет в ответ максимальное значение $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Сможет ли Саша отгадать $f(x)$ (за конечное количество шагов)?

   (М. Дидин)

10. Джерри вырыл n норок, некоторые пары из них соединены непересекающимися тоннелями. Том знает, что между любыми двумя норками существует единственный путь. Изначально Джерри находится в какой-то норке. Каждое утро Джерри переходит по одному из тоннелей в соседнюю норку. Каждый вечер к сети приходит Том, и проверяет одну из норок. Если Джерри там, то Том ловит его. Найдите наибольшее значение n такое, что Том может гарантированно поймать Джерри за какое-то время.

    (А. Науменя, И. Кухарчук)