Девятнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 22–28.09.2024
Премьер-лига. 2 тур. 24.09.2024

1. Для каждого натурального n положим

$$A_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+3} + \ldots + \sqrt{n^2+2n-1}$$

и

$$B_n = \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4} + \ldots + \sqrt{n^2+2n}.$$

Найдите все натуральные $n \geqslant 3$, для которых $[A_n] = [B_n]$.

2. На плоскости отмечены 2024 красных и 2024 синих точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пару чисел (a, b) назовём *хорошей*, если можно провести не проходящую через отмеченные точки прямую так, что с одной стороны от неё лежат ровно a красных и b синих точек. Найдите наибольшее возможное количество хороших пар.

3. Внутри вписанного семиугольника $A_1A_2\ldots A_7$ дана точка P. Оказалось, что основания перпендикуляров из P на стороны семиугольника лежат на одной окружности. Докажите, что центры семи описанных окружностей треугольников вида PA_iA_{i+1} тоже лежат на одной окружности (мы считаем $A_8 = A_1$).

4. В правильном 1000-угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника. Докажите, что среди них есть не менее девяти различных по длине.

5. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз и для любых трех последовательных чисел a, b, c число $a + c$ было кратно $b + 1$. Сможет ли он это сделать?

6. Для заданного натурального числа n рассматривается множество M всех отрезков вида $[l, r]$, где целые числа l и r удовлетворяют условию $0 \leqslant l < r \leqslant n$. Какое наибольшее число элементов из M можно выбрать так, чтобы каждый выбранный отрезок полностью содержал не более одного другого выбранного отрезка?

7. Пусть $a, b, c, d \in [0, 1]$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+d} + \frac{1}{1+d+a} \leqslant \frac{4}{1+\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}.$$

8. Для каждого натурального числа n обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей n. Докажите, что для всех пар натуральных чисел (a, b) выполняется неравенство $d(a) + d(b) \leqslant d((a, b)) + d([a, b])$. (Как обычно, (a, b) и $[a, b]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b соответственно.)