XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Второй тур. 24.09.2024.

1. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз и для любых трех соседних чисел a, b, c (именно в таком порядке) число $a+c$ делилось на $b+1$. Сможет ли он это сделать?

2. Для каждого натурального n обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей числа n. Докажите для всех пар натуральных чисел (a,b) неравенство $d(a)+d(b) \le d(\text{НОД}(a,b))+d(\text{НОК}(a,b))$.

3. В Орлёнке был проведён турнир по перетягиванию каната с участием 51 команды. Каждая команда встретилась с каждой ровно один раз. Обязательно ли можно выбрать такие 5 команд, что каждая из остальных 46 команд проиграла хотя бы одной из этих пяти команд?

4. Можно ли записать в клетках таблицы 3×3 все цифры от 1 до 9 по одному разу так, чтобы все трёхзначные числа, составленные из цифр вдоль каждой строки, вдоль каждого столбца и вдоль одной из главных диагоналей, делились на 11?

5. Дан равнобедренный треугольник MNK, $\angle MNK = 120°$. Точка A делит сторону MK в отношении $1:2$. Найдите угол ANK.

6. Верно ли, что для любого целого $N > 10$ все натуральные числа от 1 до N можно разбить на две группы так, чтобы отношение произведения чисел в одной группе к произведению чисел в другой группе не превосходило $103/100$, в каком бы порядке ни взять эти группы?

7. Фигура *магараджа* бьёт как ферзь и как конь. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все клетки доски 8×8 (каждую клетку — в один цвет) так, чтобы не нашлось двух одноцветных клеток, с одной из которых магараджа смог бы сходить на другую?

8. Набор из пяти равновеликих треугольников назовём *красивым*, если, используя весь этот набор, можно выложить одновременно три остроугольных треугольника (без наложений и дырок), и назовём *приятным*, если, используя весь этот набор, можно выложить одновременно три тупоугольных треугольника (без наложений и дырок). Существует ли набор, который и красивый, и приятный?

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Второй тур. 24.09.2024.

1. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 24 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз и для любых трех соседних чисел a, b, c (именно в таком порядке) число $a+c$ делилось на $b+1$. Сможет ли он это сделать?

2. Можно ли записать в клетках таблицы 3×3 все цифры от 1 до 9 по одному разу так, чтобы все трёхзначные числа, составленные из цифр вдоль каждой строки, вдоль каждого столбца и вдоль одной из главных диагоналей, делились на 11?

3. Дан равнобедренный треугольник MNK, $\angle MNK = 120^\circ$. Точка A делит сторону MK в отношении $1:2$. Найдите угол ANK.

4. Фигура *магараджа* бьёт как ферзь и как конь. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все клетки доски 4×4 (каждую клетку — в один цвет) так, чтобы не нашлось двух одноцветных клеток, с одной из которых магараджа смог бы сходить на другую?

5. Пусть $S(n)$ — это сумма делителей натурального числа n (включая 1 и само число). Решите уравнение $S(3n) = 4S(n)$.

6. Верно ли, что все натуральные числа от 1 до 14 можно разбить на две группы так, чтобы отношение произведения чисел в одной группе к произведению чисел в другой группе не превосходило $11/10$, в каком бы порядке ни взять эти группы?

7. В Орлёнке был проведён турнир по перетягиванию каната с участием 12 команд. Каждая команда встретилась с каждой ровно один раз. Обязательно ли можно выбрать такие 3 команды, что каждая из остальных 9 команд проиграла хотя бы одной из этих трёх команд?

8. Набор из пяти равновеликих треугольников назовём *красивым*, если, используя весь этот набор, можно выложить одновременно три остроугольных треугольника (без наложений и дырок), и назовём *приятным*, если, используя весь этот набор, можно выложить одновременно три не остроугольных треугольника (без наложений и дырок). Существует ли набор, который и красивый, и приятный?