XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 2. Юниор-лига высшая. 24.09.2024.

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Внутри треугольников OAD и OBC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle OBY = \angle XAD$, $\angle ODX = \angle BCY$ и точки O, X, Y лежат на одной прямой. Оказалось, что точки A, B, C, D не лежат на одной окружности. Докажите, что $CY \parallel AX$.

2. Михаил хочет расставить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы для любых трёх последовательных чисел a, b, c число $a+c$ было кратно $b+1$. Сможет ли он это сделать? (Каждое число можно использовать ровно один раз).

3. Площадь треугольника ABC равна $\dfrac{AB^2 - AC^2}{2}$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC, а также высота к стороне BC ограничивают треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника касается описанной окружности треугольника ABC.

4. Для каждого натурального числа n обозначим через $d(n)$ количество его натуральных делителей. Докажите, что для всех пар натуральных чисел (a, b) выполняется неравенство
$$d(a) + d(b) \le d(\text{НОД}(a, b)) + d(\text{НОК}(a, b)).$$

5. Пусть $a, b, c, d \in [0, 1]$. Докажите, что
$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} \le \frac{4}{1+\sqrt{abcd}}.$$

6. В правильном 1000-угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника. Докажите, что среди них есть не менее девяти различных по длине.

7. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) такие, что $a^b = \overline{ba}$.

8. Максим загадал квадратный трёхчлен $f(x)$. Саша хочет отгадать его. За ход Саша может назвать некоторый отрезок $[a, b]$, и Максим назовёт в ответ максимальное значение $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Сможет ли Саша отгадать $f(x)$ за конечное количество шагов?

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 2. Юниор-лига первая. 24.09.2024.

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность Ω проходит через A, пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно, а сторону BC — в точках F и G так, что F лежит между B и G. Касательная к окружности BDF в точке F и касательная к окружности CEG в точке G пересекаются в точке T. Докажите, что прямая AT параллельна BC.

2. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз, и для любых трёх последовательных чисел a, b, c число $a+c$ было кратно $b+1$. Сможет ли он это сделать?

3. Для каждого натурального числа n обозначим через $d(n)$ количество его натуральных делителей. Докажите, что для всех пар натуральных чисел (a, b) выполняется неравенство
$$d(a) + d(b) \leq d(\text{НОД}(a, b)) + d(\text{НОК}(a, b)).$$

4. Площадь треугольника ABC равна $\dfrac{AB^2 - AC^2}{2}$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC, а также высота к стороне BC ограничивают треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника касается описанной окружности треугольника ABC.

5. Для положительных чисел x, y, z таких, что $x + y + z = 12$ докажите неравенство
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

6. Набор из пяти равновеликих треугольников назовём *красивым*, если, используя весь этот набор, можно выложить одновременно три остроугольных треугольника (без наложений и дырок), и назовём *приятным*, если, используя весь этот набор, можно выложить одновременно три тупоугольных треугольника (без наложений и дырок). Существует ли набор, который и красивый, и приятный?

7. Натуральные числа a и b таковы, что $a^b \cdot b^a$ делится на 2045^{2045}. Найдите минимальное возможное значение ab.

8. На поле есть несколько тропинок. Известно, что любые две из них пересекаются не более, чем в k точках. При этом любые $k+2$ тропинки имеют общую точку пересечения. Докажите, что все тропинки пересекаются в одной точке.