**XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»**

**Третий тур. Гранд-лига. 26.09.2024.**

1. Дано натуральное $n > 3$. Всегда ли можно соединить данные $n$ точек общего положения на плоскости $n$-звенной замкнутой ломаной (так, чтобы в точности эти $n$ точек являлись вершинами), имеющей ровно одно самопересечение.

   (Е. Бакаев, П. Кожевников)

2. Для многочлена $P(x)$ положим

$$P_n := \underbrace{P(P(\ldots P(x)\ldots))}_{n \text{ раз}}.$$

   Для непостоянных многочленов $P$ и $Q$ известно, что $P_{2024} \equiv Q_{2024}$ и $P_{202} \equiv Q_{202}$. Для какого наименьшего $k$ можно гарантированно утверждать, что $P_k \equiv Q_k$?

   (Л. Шатунов)

3. В остроугольном треугольнике $ABC$ высоты пересекаются в точке $H$. Пусть $AM$ — медиана $ABC$, $N$ — середина меньшей дуги $BC$ окружности $(ABC)$. Пусть $Q$ — основание перпендикуляра из точки $H$ на прямую $AM$. Окружность $(AQN)$ пересекает прямые $AB$ и $AC$ в точках $B'$ и $C'$. Докажите, что точка пересечения $B'C'$ и $BC$ лежит на окружности $(NMQ)$.

   (Н. Штейберг, И. Кухарчук)

4. Найдите наименьшее действительное число $\lambda$ такое, что для любых натуральных чисел $n, a, b$, где $a + b$ не делится на $n$, существует натуральное число $k \le n - 1$, удовлетворяющее

$$\left\{\frac{ak}{n}\right\} + \left\{\frac{bk}{n}\right\} \le \lambda.$$

5. На клетки доски $2024 \times 2024$ кладут $k$ шариков так, чтобы в каждой клетке было не более одного шарика и не было двух шариков на двух соседних клетках (соседние клетки определяются как клетки, имеющие общую сторону). Определите наибольшее значение $k \le 2024^2/2$, при котором для всех расположений $k$ шариков, удовлетворяющих условиям выше, мы можем переместить один из размещенных шариков на одну из соседних клеток, и новое расположение будет удовлетворять условиям выше.

6. В Римской империи $n$ портов, некоторые пары портов соединены регулярными морскими рейсами, каждый рейс занимает какое-то своё время. Рейс называется важным, если любой кратчайший по времени маршрут из какого-то порта в Рим содержит этот рейс. Известно, что каждый рейс важный или станет важным, если какой-то другой рейс отменят из-за шторма. Найдите максимально возможное число рейсов в империи.

   (М. Дидин)

7. Конечное множество натуральных чисел $S$ таково, что для каждого элемента $x$ в $S$ и каждого его делителя $d$ имеется ровно один элемент $y$ в $S$, для которого $(x, y) = d$. Сколько элементов может быть в $S$ (найдите все возможности)?

8. В графе не менее 4 вершин. Петя стирает две вершины графа и все выходящие из них рёбра. Известно, что вне зависимости от действий Пети получится один и тот же граф. Докажите, что исходный граф полный или состоит из изолированных вершин.

   (М. Дидин)

9. На доске написаны положительные числа. Разрешается стереть одно число $a$ и записать вместо него два числа $b, c > 0$, для которых $bc = 2a^2$. Докажите, что если начать с одного числа $r$ и сделать $n^2 - 1$ операцию, то хотя бы одно из получившихся $n^2$ чисел будет не больше $nr$.

10. Окружность $\omega_a$ касается сторон $AB$ и $AC$ и описанной окружности треугольника $ABC$. Окружность $\omega_b$ касается сторон $BC$ и $BA$ и описанной окружности треугольника $ABC$. Из точки пересечения $\omega_a$ и $\omega_b$ провели касательные $l$ и $m$ к вписанной окружности. Доказать, что найдется окружность, проходящая через $A$ и $B$ и касающаяся $l$ и $m$.

(П. Ким)