Девятнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 22–28.09.2024
Премьер-лига. 3 тур. 26.09.2024

1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OC}.$$

Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Его малые диагонали в пересечении образуют выпуклый шестиугольник $GHIJKL$ (AC пересекается с BF и BD в G и H соответственно и т. д.). Известно, что в каждый из четырехугольников $ABIK$, $BCJL$, $CDKG$, $DELH$, $EFGI$ можно вписать окружность. Может ли оказаться, что в четырехугольник $FAHJ$ также можно вписать окружность?

3. Найдите все последовательности неотрицательных целых чисел a_0, a_1, a_2, $\ldots$ такие, что $a_0 = 0$ и для любых неотрицательных целых чисел k и m число $k^2 - m^2$ делится на $a_k - a_m$.

4. В k клеток доски 2024×2024 кладут по одному шарику так, что никакие два шарика не лежат в соседних по стороне клетках. При каком наибольшем $k \leqslant \frac{2024^2}{2}$ заведомо (независимо от расположения шариков) можно переместить один из шариков на свободную соседнюю по стороне клетку так, чтобы по-прежнему никакие два шарика не оказались в соседних клетках?

5. Дан правильный 101-угольник. Рассмотрим всевозможные подмножества, составленные из 50 его вершин, среди которых нет соседних. Каждое из этих множеств – красное или синее. Докажите, что найдутся два непересекающихся множества одного цвета.

6. Пусть a_1, a_2, $\ldots a_n$ — положительные числа, $n \geqslant 1$. Докажите, что

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(\frac{1}{1+a_1} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

7. Конечное множество натуральных чисел S таково, что для каждого элемента $x \in S$ и каждого его делителя d в S имеется ровно один элемент y (не обязательно отличный от x), для которого $(x, y) = d$. Сколько элементов может быть в S (найдите все возможности)?

8. На доске написаны положительные числа. Разрешается стереть одно число a и записать вместо него два числа $b, c > 0$, для которых $bc = 2a^2$. Докажите, что если начать с одного числа r и сделать $n^2 - 1$ операцию, то хотя бы одно из получившихся n^2 чисел будет не больше nr.