XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Третий тур. 26.09.2024.

1. Дан правильный 101-угольник. Рассмотрим всевозможные подмножества, составленные из 50 его вершин, среди которых нет соседних. Некоторые из этих подмножеств отнесли в первую группу, а остальные — во вторую. Докажите, что найдутся два непересекающихся подмножества, оказавшихся в одной группе.

2. В k клеток доски 2024×2024 кладут по одному шарику так, что никакие два шарика не лежат в соседних по стороне клетках. При каком наибольшем $k \leq 2024^2/2$ заведомо (независимо от расположения шариков) можно переместить один из шариков на свободную соседнюю по стороне клетку так, чтобы по-прежнему никакие два шарика не оказались в соседних клетках?

3. Для действительных чисел a, b и c верно, что $a - 7b + 8c = 4$ и $8a + 4b - c = 7$. Какие значения может принимать выражение $a^2 - b^2 + c^2$?

4. На Южном математическом турнире в финал вышли команды A и B. Оказалось, что каждый школьник из команды A знаком по крайней мере с одним школьником из команды B, но не со всеми членами этой команды. Также и каждый школьник из команды B знаком по крайней мере с одним школьником из команды A, но не со всеми членами этой команды. Докажите, что можно пригласить для награждения на сцену двух школьников команды A и двух из команды B таких, что каждый из четверых знаком ровно с одним школьником из другой команды, стоящим на сцене.

5. Конечное множество натуральных чисел S таково, что для каждого элемента $x \in S$ и каждого его делителя d справедливо утверждение: в S имеется ровно один элемент y (не обязательно отличный от x), для которого $(x, y) = d$. Сколько элементов может быть в S (найдите все ответы)?

6. Найдите все пары натуральных чисел (k, n), удовлетворяющие равенству

$$1! + 2! + \ldots + k! = 1 + 2 + \ldots + n.$$

7. На доске были написаны натуральные числа от 1 до n. Когда одно из чисел стёрли, среднее арифметическое чисел на доске стало равным $11\frac{1}{4}$. Какое число стёрли?

8. Окружность ω касается прямой l в точке A. Точка B диаметрально противоположна точке A, CD — другой диаметр окружности ω. Прямые BC,BD и CD пересекают прямую l в точках N, M и K соответственно. Докажите, что углы BNA и MDK либо равны, либо в сумме дают $180°$.

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Третий тур. 26.09.2024.

1. На доске были написаны натуральные числа от 1 до n. Когда одно из чисел стёрли, среднее арифметическое чисел на доске стало равным $11\frac{1}{4}$. Какое число стёрли?

2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катете BC выбрана точка M так, что $BM = 2MC$. Докажите, что $\angle MAB = \angle MKC$.

3. В каждой клетке доски 4×4 стоит рыцарь или лжец (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). На вопрос «Сколько лжецов стоит в клетках соседних с вашей?» все рыцари дали одинаковые ответы. Все лжецы на этот же вопрос тоже дали одинаковые ответы (хотя бы один лжец есть). Какое наибольшее количество рыцарей могло стоять на доске? (Соседними называются клетки имеющие общую сторону.)

4. На Южном математическом турнире в финал вышли команды A и B. Оказалось, что каждый школьник из команды A знаком по крайней мере с одним школьником из команды B, но не со всеми членами этой команды. Также и каждый школьник из команды B знаком по крайней мере с одним школьником из команды A, но не со всеми членами этой команды. Докажите, что можно пригласить для награждения на сцену двух школьников команды A и двух из команды B таких, что каждый из четверых знаком ровно с одним школьником из другой команды, стоящим на сцене.

5. Могут ли 7 планет выстроиться так, чтобы с каждой планеты можно было наблюдать ровно четыре другие? (С одной планеты можно наблюдать другую, если на соединяющем их отрезке нет других планет; планеты считайте точками. Планеты вращаются в одной плоскости — эклиптике.)

6. На учительском столе лежат десять карточек, на которых написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Петя и Вася по очереди выбирают со стола по одной карточке и выкладывают их на своих партах слева направо, составляя каждый своё пятизначное число (на своём первом ходу нельзя выбирать карточку с цифрой 0). Начинает Петя. Если у Пети после его пятого хода получится число, которое делится на 6, он победит. Сможет ли Вася помешать Пете одержать победу?

7. Произведение трёх последовательных натуральных чисел в 8 раз больше, чем их сумма. Чему равна сумма квадратов данных трёх чисел?

8. Натуральные числа a и b таковы, что число $(a+b)(a+3b)$ делится на 4, но не делится на 8. Докажите, что число $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ делится на 8, но не делится на 16.