XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 3. Юниор-лига высшая. 26.09.2024.

1. Пусть a_1, $a_2 \ldots a_n$ — положительные числа и $n \geqslant 1$. Докажите, что
$$n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right)\left(n+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Его малые диагонали в пересечении образуют выпуклый шестиугольник $GHIJKL$ (AC пересекается с BF и BD в G и H соответственно и т. д.). Известно, что в каждый из четырёхугольников $ABIK$, $BCJL$, $CDKG$, $DELH$, $EFGI$ можно вписать окружность. Могло ли так случиться, чтобы в четырёхугольник $FAHJ$ также можно было вписать окружность?

3. В k клеток доски 2024×2024 кладут по одному шарику так, что никакие два шарика не лежат в соседних по стороне клетках. При каком наибольшем $k \leqslant \frac{2024^2}{2}$ заведомо (независимо от расположения шариков) можно переместить один из шариков на свободную соседнюю по стороне клетку так, чтобы по-прежнему никакие два шарика не оказались в соседних клетках?

4. Найдите все последовательности целых неотрицательных чисел $\{a_i\}$ такие, что $a_0 = 0$ и для любых целых неотрицательных чисел k и m число $k^2 - m^2$ делится на $a_k - a_m$.

5. Конечное множество натуральных чисел S таково, что для каждого элемента $x \in S$ и каждого его делителя d в S имеется ровно один элемент y (не обязательно отличный от x), для которого НОД$(x, y) = d$. Сколько элементов может быть в S (найдите все возможности)?

6. Дан треугольник ABC с описанной окружностью Ω. I — центр его вписанной окружности. При этом $|AC| \neq |BC|$. Внутренняя биссектриса угла $\angle CAB$ пересекает сторону BC в точке D, а внешние биссектрисы углов $\angle ABC$ и $\angle BCA$ пересекают окружность Ω в точках E и F соответственно. Пусть G — пересечение прямых AE и FI, а Γ — описанная окружность треугольника BDI. Покажите, что E лежит на Γ тогда и только тогда, когда G лежит на Γ.

7. Найдите все пары натуральных чисел (k, n), удовлетворяющие равенству
$$1! + 2! + ... + k! = 1 + 2 + ... + n.$$

8. В графе не менее 4 вершин. Петя стирает две вершины графа и все выходящие из них рёбра. Известно, что вне зависимости от действий Пети получится один и тот же граф. Докажите, что исходный граф полный или состоит из изолированных вершин.

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 3. Юниор-лига первая. 26.09.2024.

1. Найдите все пары натуральных чисел (k, n), удовлетворяющие равенству
$$1! + 2! + ... + k! = 1 + 2 + ... + n.$$

2. Пусть a, b, c — положительные числа, причем $abc = 8$. Докажите, что
$$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geqslant 6.$$

3. Рассмотрим правильный 101-угольник и все подмножества по 50 его вершин, среди которых нет соседних. Каждое из этих подмножеств красное или синее. Докажите, что найдутся два непересекающихся подмножества, окрашенных в один и тот же цвет.

4. Найдите все положительные целые числа n, такие, что элементы множества
$$\{1, 2, ..., n, n+2, n+3, ..., 2n+1\} = \{1, 2, ..., 2n+1\} \setminus \{n+1\}$$
можно разбить на две группы с одинаковым количеством элементов и одинаковой суммой их элементов.

5. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Его малые диагонали в пересечении образуют выпуклый шестиугольник $GHIJKL$ (AC пересекается с BF и BD в G и H соответственно и т. д.). Известно, что в каждый из четырёхугольников $ABIK$, $BCJL$, $CDKG$, $DELH$, $EFGI$ можно вписать окружность. Могло ли так случиться, чтобы в четырёхугольник $FAHJ$ также можно было вписать окружность?

6. В k клеток доски 2024×2024 кладут по одному шарику так, что никакие два шарика не лежат в соседних по стороне клетках. При каком наименьшем k можно расставить шарики так, что никакой из них нельзя переместить на свободную соседнюю по стороне клетку так, чтобы по-прежнему никакие два шарика не оказались в соседних клетках?

7. Дан треугольник ABC с описанной окружностью Ω. I — центр его вписанной окружности. При этом $|AC| \neq |BC|$. Внутренняя биссектриса угла $\angle CAB$ пересекает сторону BC в точке D, а внешние биссектрисы углов $\angle ABC$ и $\angle BCA$ пересекают окружность Ω в точках E и F соответственно. Пусть G — пересечение прямых AE и FI, а Γ — описанная окружность треугольника BDI. Покажите, что E лежит на Γ тогда и только тогда, когда G лежит на Γ.

8. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами a, b и c. Известно, что $P(a) = bc, P(b) = ac, P(c) = ab$. Докажите, что
$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = 0.$$