XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Полуфинал. Гранд-лига. 27.09.2024.

1. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$ числа такие, что $n > m$ и числа $n^2 + r$, $m^2 + r$ являются степенями 2. Докажите, что $n > \frac{2m^2}{r}$.

2. Пусть n — натуральное число. Даны $2n$ различных прямых на плоскости, среди которых нет двух параллельных. Некоторые n из этих $2n$ прямых покрашены синим, а оставшиеся n прямых покрашены красным. Через B обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной синей прямой, а через R обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной красной прямой. Докажите, что существует окружность, которая с каждым из множеств B и R имеет ровно по $2n - 1$ общих точек.

3. Петя и Вася играют на доске $n \times n$, начинает Петя. Каждый игрок выбирает столбец или строку и красит её в свой цвет (не обращая внимание на предыдущие цвета). Один и тот же столбец или строку нельзя выбирать дважды. Петя хочет, чтобы после n ходов Пети и n ходов Васи клеток его цвета было как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться при правильной игре?

4. Две окружности ω, ω' пересекаются в точках B, B'. Проводятся пары параллельных прямых l, l', симметричных относительно BB' и пересекающих ω, ω' соответственно. Пусть D это та из двух точек пересечения ω и l, что лежит по одну сторону относительно линии центров окружностей ω и ω' с точкой B. Пусть E это та из двух точек пересечения ω' и l', что лежит по одну сторону относительно линии центров окружностей ω и ω' с точкой B'. Касательная к ω в D и касательная к ω' в E пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора l и l').

   (П. Кожевников, М. Дидин)

5. В правильном 2024-угольнике проведены все стороны и диагонали. Петя задумал расстановку стрелок на этих отрезках, а Вася пытается её отгадать. За ход Вася указывает на несколько вершин, а Петя отвечает, из каких из них можно попасть в какие, двигаясь по стрелкам между выбранными вершинами. Например, Вася может спросить про 2 вершины и узнать положение стрелки между ними, всего при такой стратегии ему потребуется $2023 \cdot 1012$ ходов. Как Васе узнать расположение всех стрелок за $2023 \cdot 506$ ходов?

   (М. Дидин)

6. Последовательность $\{a_n\}$ целых неотрицательных чисел при всех неотрицательных n удовлетворяет условиям $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены последовательности различны.

7. Пусть Ω — вневписанная окружность треугольника ABC, которая касается продолжений сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что касательные к (ABC), проведенные в B и C пересекаются на Ω тогда и только тогда, когда EF касается (ABC).

   (К. Бельский)

8. Даны натуральное $n \geq 2$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Докажите неравенство
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i}\right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\right) \leq \frac{n}{2}.$$

9. Пусть $n, b \in \mathbb{N}$. Число n назовем b-различимым если существует такое множество из n различных натуральных чисел, меньших b, что в нем нет двух различных подмножеств с одинаковой суммой элементов. Какое наибольшее число n является 100-различимым?

10. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Найдите все многочлены $Q(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любого натурального числа n существует многочлен $R_n(x)$ с целыми коэффициентами, такой что

$$Q(x)^{2n} - 1 = R_n(x) \left(P(x)^{2n} - 1\right).$$