Девятнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 22–28.09.2024
Премьер-лига. 4 тур. 27.09.2024

1. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а H — его ортоцентр. Лучи AO, CO пересекают стороны BC, BA в точках A_1, C_1 соответственно. Точка K — проекция O на отрезок A_1C_1, точка M — середина AC. Докажите, что $\angle HMA = \angle BKC_1$.

2. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 нарисован треугольника ABC с вершинами в углах клеток. Расстояние от вершины A до середины дуги BC описанной около ABC окружности равно произведению сторон треугольника ABC. Найдите углы треугольника.

3. Даны три кучи камней, в которых изначально содержится 2000, 4000 и 4899 камней соответственно. Али и Баба делают ходы по очереди, первый ход делает Али. За один ход игрок может выбрать две кучи и переложить несколько камней из одной кучи в другую, при условии, что в конце хода в куче, из которой перекладываются камни, будет не меньше камней, чем в куче, в которую они перекладываются. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

4. За один ход прямоугольный треугольник с катетами a и b можно заменить или на прямоугольный треугольник с катетами ka, kb при некотором натуральном k, или на прямоугольный треугольник с катетами $a+b$ и h, где h — длина высоты, опущенной на гипотенузу. Можно ли за несколько ходов из треугольника с катетами 8 и 15 получить треугольник с катетами 23 и 264?

5. Числа 1, 2, 3, …, 101 выписаны в строку. У Васи есть 100 карточек, на каждой из которых написаны два различных натуральных числа, не превосходящих 101. Вася может взять любую из своих карточек, прочитать написанные на ней числа a и b, и поменять местами числа, стоящие в строке на a-м и b-м местах. Оказалось, что, используя свои карточки, Вася может получить любой порядок чисел в строке. Докажите, что если он использует все свои карточки по порядку 101 раз (то есть первую, вторую, …, 101-ю, первую, …, 101-ю), то все числа в строке вернутся на свои места.

6. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Оказалось, что каждый делитель, кроме двух крайних, не больше среднего геометрического своих соседей. Докажите, что n – степень простого числа.

7. Целые числа a и b и натуральное число n таковы, что все достаточно большие натуральные числа представимы в виде $ax^n + by^n$ с целыми x и y. Докажите, что $n = 1$.

8. Последовательность a_0, a_1, a_2, …целых неотрицательных чисел при всех неотрицательных n удовлетворяет условиям $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены последовательности различны.