XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Полуфинал. 27.09.2024.

1. За один ход прямоугольный треугольник с катетами a и b можно заменить или на прямоугольный треугольник с катетами ka, kb при некотором натуральном k, или на прямоугольный треугольник с катетами $a+b$ и h, где h — длина высоты, опущенной на гипотенузу. Можно ли за несколько ходов из треугольника с катетами 8 и 15 получить треугольник с катетами 23 и 264?

2. На плоскости даны 4 точки. Расстояние между любыми двумя точками не превышает 1. Докажите, что можно выбрать 2 точки, расстояние между которыми не превышает $1/\sqrt{2}$.

3. Али и Баба играют в игру по перекладыванию камней. Изначально даны три кучи камней, в которых содержится 2000, 4000 и 4899 камней соответственно. При своем ходе игрок может выбрать две кучи и переложить несколько камней из одной кучи в другую, при условии, что в конце хода в куче, из которой перекладываются камни, будет не меньше камней, чем в той куче, в которую они перекладываются. Игроки ходят по очереди, начинает Али. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

4. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Оказалось, что каждый делитель, кроме двух крайних, не больше среднего геометрического своих соседей. Докажите, что n является степенью некоторого простого числа.

5. В группе людей из каждых $2n$ знакомых пар между собой найдётся $n+1$ пара и такой человек входящий в эти пары, что он знаком со всеми оставшимися. Докажите, что можно убрать одного человека так, чтобы осталось не более $n-1$ пары знакомых.

6. Дана последовательность неотрицательных целых чисел $\{a_n\}$ такая, что при всех $n \geq 0$ выполняются условия: $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, и $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены последовательности различны.

7. В прямоугольном треугольнике ABC на большем катете AC отмечена точка K так, что $CK = CB$. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая гипотенузу AB в точке M. Оказалось, что $MB = MK + BC$. Найдите угол ABC, если $\angle NKC = \alpha$, где N - середина BC.

8. *Клеткоед* ходит по доске 7×7 как шахматный конь. При этом каждая клетка, которая находится под боем, закрашивается. Закрашивание производится после каждого (и перед первым) хода клеткоеда. За какое наименьшее число ходов, начав с какой-нибудь клетки, клеткоед сможет закрасить все клетки доски?

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Бои за 5–6 и 7–8 места. 27.09.2024.

1. *Клеткоед* ходит по доске 7×7 как шахматный конь. При этом каждая клетка, которая находится под боем, закрашивается. Закрашивание производится после каждого (и перед первым) хода клеткоеда. За какое наименьшее число ходов, начав с какой-нибудь клетки, клеткоед сможет закрасить все клетки доски?

2. На плоскости даны 4 точки. Расстояние между любыми двумя точками не превышает 1. Докажите, что можно выбрать 2 точки, расстояние между которыми не превышает $1/\sqrt{2}$.

3. Когда в городе открылся кружок по математике, на него ходило 10 ребят. Популярность кружка росла, и количество учащихся ежегодно увеличивалось на целое число процентов, но не превышало 35 человек. Какое наибольшее число лет это могло продолжаться?

4. В прямоугольном треугольнике ABC на большем катете AC отмечена точка K так, что $CK = CB$. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая гипотенузу AB в точке M. Оказалось, что $MB = MK + BC$. Найдите угол ABC, если $\angle NKC = \alpha$, где N – середина BC

5. Дана последовательность неотрицательных целых чисел $\{a_n\}$ такая, что при всех $n \geq 0$ выполняются условия: $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, и $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены последовательности различны.

6. Натуральные числа a, b и положительное число c удовлетворяют условию $\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}$. Докажите, что $c \geq 1$.

7. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Оказалось, что каждый делитель, кроме двух крайних, не больше среднего геометрического своих соседей. Докажите, что n является степенью некоторого простого числа.

8. На 10 карточках написаны числа: 1; -2; 3; -4; 5; -6; 7; -8; 9; -10. Двое по очереди выбирают себе по одной карточке, после чего подсчитывают суммы чисел на своих карточках. Выигрывает игрок, у которого получилась сумма, большая по модулю (например, $|-5| > |2|$). Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Бой за 1–2 место. 27.09.2024.

1. *Клеткоед* ходит по доске 7×7 как шахматный конь. При этом каждая клетка, которая находится под боем, закрашивается. Закрашивание производится после каждого (и перед первым) хода клеткоеда. За какое наименьшее число ходов, начав с какой-нибудь клетки, клеткоед сможет закрасить все клетки доски?

2. На плоскости даны 4 точки. Расстояние между любыми двумя точками не превышает 1. Докажите, что можно выбрать 2 точки, расстояние между которыми не превышает $1/\sqrt{2}$.

3. Когда в городе открылся кружок по математике, на него ходило 10 ребят. Популярность кружка росла, и количество учащихся ежегодно увеличивалось на целое число процентов, но не превышало 35 человек. Какое наибольшее число лет это могло продолжаться?

4. В прямоугольном треугольнике ABC на большем катете AC отмечена точка K так, что $CK = CB$. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая гипотенузу AB в точке M. Оказалось, что $MB = MK + BC$. Найдите угол ABC, если $\angle NKC = \alpha$, где N – середина BC.

5. Дана последовательность неотрицательных целых чисел $\{a_n\}$ такая, что при всех $n \geq 0$ выполняются условия: $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, и $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены последовательности различны.

6. Натуральные числа a, b и положительное число c удовлетворяют условию

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}.$$

Докажите, что $c \geq 1$.

7. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Оказалось, что каждый делитель, кроме двух крайних, не больше среднего геометрического своих соседей. Докажите, что n является степенью некоторого простого числа.

8. На 10 карточках написаны числа: 1; -2; 3; -4; 5; -6; 7; -8; 9; -10. Двое по очереди выбирают себе по одной карточке, после чего подсчитывают суммы чисел на своих карточках. Выигрывает игрок, у которого получилась сумма, большая по модулю (например, $|-5| > |2|$). Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Бои за 3–4, 5–6 и 7–8 места. 27.09.2024.

1. *Клеткоед* ходит по доске 7×7 как шахматный конь. При этом каждая клетка, которая находится под боем, закрашивается. Закрашивание производится после каждого (и перед первым) хода клеткоеда. За какое наименьшее число ходов, начав с какой-нибудь клетки, клеткоед сможет закрасить все клетки доски?

2. Назовём число *актуальным*, если оно в 2024 раза больше суммы своих цифр. Существуют ли два актуальных числа?

3. Когда в городе открылся кружок по математике, на него ходило 10 ребят. Популярность кружка росла, и количество учащихся ежегодно увеличивалось на целое число процентов, но не превышало 35 человек. Какое наибольшее число лет это могло продолжаться?

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На катете BC выбраны точки M и N так, что $\angle BAN = \angle NAM = \angle MAC$. Через точку M проведена прямая, пересекающая отрезок AN в точке E, а гипотенузу AB в точке F. Найдите отношение $AB : AE$, если известно, что $\angle ANB = 130^\circ$, $\angle BFM = 110^\circ$.

5. На шахматную доску по одной выставляются белые и чёрные ладьи в любом порядке. Очередную ладью можно ставить на поле, побитое одинаковым числом чёрных и белых ладей. Какое наибольшее число ладей можно выставить на поле таким образом?

6. Натуральные числа a, b и положительное число c удовлетворяют условию

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}.$$

Докажите, что $c \geq 1$.

7. Решите в натуральных числах уравнение $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$.

8. На 10 карточках написаны числа: 1; -2; 3; -4; 5; -6; 7; -8; 9; -10. Двое по очереди выбирают себе по одной карточке, после чего подсчитывают суммы чисел на своих карточках. Выигрывает игрок, у которого получилась сумма, большая по модулю (например, $|-5| > |2|$). Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?