XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 4. Юниор-лига высшая. 27.09.2024.

1. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в порядке возрастания:
$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$
Оказалось, что каждый делитель, кроме двух крайних, не больше среднего геометрического своих соседей. Докажите, что n – степень простого числа.

2. Вписанная окружность с центром I остроугольного треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке T. На отрезках BT и CT отмечены точки E и F соответственно так, что $BD = BE$ и $CD = CF$. Описанная окружность треугольника AID пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке G. Докажите, что точки T, E, F, G лежат на одной окружности.

3. Вершины треугольника ABC лежат в узлах единичной решётки. Расстояние от вершины A до середины дуги BC описанной около ABC окружности равно произведению сторон ABC. Найдите углы треугольника.

4. Последовательность a_0, a_1, a_2, … целых неотрицательных чисел при всех неотрицательных n удовлетворяет условиям $a_{2n} = 2a_n$, $a_{4n+1} = 4a_n + 3$, $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} - 1$. Докажите, что все члены последовательности различны.

5. Даны три кучи: по 2000, 4000 и 4899 камней. Али и Баба делают ходы по очереди, первый ход делает Али. За один ход игрок может выбрать две кучи и переложить несколько камней из одной кучи в другую, при условии, что в конце хода в куче, из которой перекладываются камни, будет не меньше камней, чем в куче, в которую они перекладываются. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

6. Король плоского государства хочет построить в своей стране n триумфальных арок, пронумерованных числами от 1 до n. Для некоторых пар номеров он заранее задал расстояние между соответствующими им арками. Известно, что существует две арки с заданным между ними расстоянием, после постройки которых у короля будет ровно k способов построить оставшиеся арки. Докажите, что после постройки любых двух арок у короля будет не более k способов построить оставшиеся.

7. В правильном 2024-угольнике проведены все стороны и диагонали. Петя задумал расстановку стрелок на этих отрезках, а Вася пытается её отгадать. За ход Вася указывает на несколько вершин, а Петя называет все упорядоченные пары (A, B) из этих вершин такие, что из A в B существует путь по стрелкам между выбранными вершинами. Например, Вася может спросить про 2 вершины и узнать положение стрелки между ними, всего при такой стратегии ему потребуется 2023×1012 ходов. Как Васе узнать расположение всех стрелок за 2023×506 ходов?

8. Целые числа a и b и натуральное число n таковы, что все достаточно большие натуральные числа представимы в виде $ax^n + by^n$ с целыми x и y. Докажите, что $n = 1$.

XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Тур 4. Юниор-лига первая. 27.09.2024.

1. Для положительных чисел a, b, c таких, что $a+b+c=3$ докажите неравенство
$$\frac{a^6}{c^2+2b^3}+\frac{b^6}{a^2+2c^3}+\frac{c^6}{b^2+2a^3}\geqslant 1.$$

2. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в порядке возрастания:
$$1=d_1<d_2<\dots<d_k=n.$$
Оказалось, что каждый делитель, кроме двух крайних, не больше среднего геометрического своих соседей. Докажите, что n — степень простого числа.

3. Последовательность a_0, a_1, a_2, … целых неотрицательных чисел при всех неотрицательных n удовлетворяет условиям: $a_{2n}=2a_n$, $a_{4n+1}=4a_n+3$, $a_{4n-1}=2a_{2n-1}-1$. Докажите, что все члены последовательности различны.

4. Вершины треугольника ABC лежат в узлах единичной решётки. Расстояние от вершины A до середины дуги BC описанной около ABC окружности равно произведению сторон ABC. Найдите углы треугольника.

5. *Клеткоед* ходит по доске 7×7 как шахматный конь. При этом после каждого хода (и перед первым) все клетки, находящиеся под боем, закрашиваются. За какое наименьшее число ходов, начав с какой-нибудь клетки, клеткоед сможет закрасить все клетки доски?

6. Дано множество точек на плоскости такое, что расстояние между любыми двумя не более 1. Соединим точки на расстоянии 1 отрезком. Докажите, что любые два таких отрезка пересекаются.

7. Петя и Вася играют на доске $n\times n$, начинает Петя. Каждый игрок выбирает столбец или строку и красит её в свой цвет (не обращая внимание на предыдущие цвета). Один и тот же столбец или строку нельзя выбирать дважды. Петя хочет, чтобы после того, как он и Вася сделали по n ходов, клеток его цвета было как можно больше. Какого наилучшего результата Петя может добиться при правильной игре?

8. Дан треугольник ABC такой, что $3AC=AB+BC$. Его вневписанная окружность касается стороны AB в точке P, и продолжения стороны AC в точке Q. Найдите угол CPQ.