XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Финал. Гранд-лига. 28.09.2024.

1. Даны фиксированные окружности Ω и γ такие, что существует шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в Ω и описанный вокруг ω. Докажите, что величина
$$\frac{S_{ABCDEF}}{AD+BE+CF}$$
не зависит от выбора шестиугольника $ABCDEF$.

   (А. Заславский, Tran Quang Hung (Вьетнам), Квант 10-2024)

2. За круглым столом сидят n штангистов. Сила каждого из них равна максимальному весу штанги, которую он поднимает. Каждый штангист выбрал натуральное число k и считает своими соседями k человек справа и k человек слева (если A считает B своим соседом, B не обязан считать A своим соседом). Самооценка штангиста равна доле более слабых штангистов, чем он сам, среди его соседей. Может ли средняя самооценка штангистов быть больше 0.8?

   (М.Дидин)

3. Пусть a, b и c неотрицательные целые числа, причем $ab \geq c^2$. Докажите, что найдется натуральное n и целые $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, для которых
$$a=\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ b=\sum_{i=1}^{n} y_i^2,\ c=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

4. Между некоторыми клетками доски $n \times n$ установлены стенки. Фишка может перемещаться на соседнюю по стороне клетку. Первый ход можно сделать в любом направлении, далее каждый ход можно либо сделать шаг вперед, либо повернуться направо и сразу сделать шаг вперед. Нельзя проходить сквозь стенки. Известно, что фишка может попасть из клетки A в клетку B за несколько ходов. Может ли кратчайший маршрут содержать более $1.9n^2$ ходов?

   (М. Дидин, И. Иванов-Погодаев)

5. Дан треугольник ABC и на его описанной окружности на меньшей дуге BC выбраны точки P, Q, R, S. Точки P', Q', R', S' лежат на прямых AP, AQ, AR, AS так, что середины отрезков PP', QQ', RR', SS' лежат на прямой BC. Оказалось, что B, P', Q' — одна прямая и C, R', S' — одна прямая. Докажите, что точки P', Q', R', S' лежат на одной окружности.

   (К. Бельский)

6. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что если
$$P(x)-P'(x)-P''(x)+P'''(x) \geqslant 0$$
для любого $x \in \mathbb{R}$, то $P(x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

7. Во всех клетках в главной диагонали и в клетках над ней квадратной таблицы $n \times n$ расставили действительные числа (главная диагональ это та, что начинается в левом верхнем угле таблицы). Известно, что для каждой клетки таблицы в которой стоит число сумма чисел в клетках одной строки и одного столбца с ней равна нулю. Известно, что число в верхней левой клетке равно единице. Найдите все возможные значения в других клетках главной диагонали и в клетках над ней.

8. Докажите, что множество чисел вида x^2-xy+y^2, где x, y — натуральные, не представляется в виде объединения конечного числа арифметических прогрессий.

9. Ребра графа разбиваются на циклы длины 4, все вершины имеют степень 4. Докажите, что из каждого из этих циклов длины 4 можно выбрать по ребру так, чтобы они образовали паросочетание.

10. Какое наименьшее количество точек на поверхности S правильного тетраэдра с ребром 2 можно выбрать таким образом, чтобы от любой точки S до одной из выбранных точек можно было бы добраться, пройдя расстояние не больше 1 и не покидая S?