XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Финал. 28.09.2024.

1. Докажите, что в треугольник е периметра P и площади S сумма расстояний от оснований биссектрис до сторон треугольника не меньше $18 \cdot S/P$.

2. В каждой ячейке таблицы 8×8 живет рыцарь или лжец. Столбцы обозначены латинскими буквами a, b, c, d, e, f, g, h, а строки числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все обитатели таблицы произнесли следующее утверждение: «Количество лжецов в моем столбце больше, чем количество лжецов в моей строке». Определите, сколько существует расстановок рыцарей и лжецов, удовлетворяющих условию.

3. Диагонали двух параллелограммов $ABCD$ и $ABMN$, лежащих один вне другого, пересекаются в точках E и F соответственно. Точки K и L — середины сторон AN и AD соответственно. Докажите, что прямые CK, DF, NE и ML проходят через одну точку.

4. На доске написаны дроби вида $1013/k$, где $k = 1, 2, \dots, 2025$. За один ход можно стереть два любых числа m и n, записанных на доске, и заменить их на число $2 \cdot m \cdot n - m - n + 1$. После 2024 таких ходов на доске осталось одно число. Определите все возможные значения этого числа.

5. Между некоторыми клетками доски 8×8 установлены стенки. Фишка может перемещаться на соседнюю по стороне клетку. Первый ход можно сделать в любом направлении, далее каждый ход можно либо сделать шаг вперед, либо повернуться направо и сразу сделать шаг вперед. Нельзя проходить сквозь стенки. Известно, что фишка может попасть из клетки A в клетку B за несколько ходов. Может ли кратчайший маршрут содержать более 70 ходов?

6. Обозначим s_n — сумму всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n, а t_n — сумму всех остальных натуральных чисел, не превосходящих n. При каких $n \geq 2$ разность $s_n - t_n$ делится на n?

7. Ана и Банан играют в следующую игру: Банан рисует дерево на вершинах $1, 2, \dots, 2024$, не показывая его. Ана может выбрать любые две вершины A и B и спросить Банана о длине кратчайшего пути из A в B. Может ли Ана за 4045 вопросов найти две вершины, расстояние между которыми в этом графе максимально? (Банан всегда отвечает честно.)

8. Для натурального числа $n > 1$ обозначим $L(n)$ наибольший натуральный делитель числа n, который не равен n. Например, $L(12) = 6$, $L(5) = 1$. Положим также $L(1) = L(0) = 0$. Найдите все натуральные n, для которых

$$n + L(n) + L(L(n)) + \dots + \underbrace{L(\dots L(n)\dots)}_{n \text{ раз}} = 1035.$$