XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

ФИНАЛ. Юниор-лига. 28.09.2024.

1. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму всех не превосходящих n натуральных чисел, взаимно простых с n, а через T_n — сумму всех остальных натуральных чисел, не превосходящих n. При каких $n \geqslant 2$ разность $S_n - T_n$ делится на n?

2. Рассмотрим граф, в котором каждое ребро принадлежит не более чем трём циклам. Докажите, что его вершины можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, имели разные цвета.

3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. Пусть O — точка пересечения их общих внешних касательных, а Γ — окружность с центром в O и радиусом, равным среднему геометрическому длин отрезков касательных из O к ω_1 и ω_2. Точки P и Q принадлежат окружности Γ и симметричны относительно O_1O_2. Точка X на ω_1 и точка Y на ω_2 такие, что OX симметрично OY относительно O_1O_2 и $OX \cdot OY = OP^2$. Пусть A и B — отличные от X точки пересечения ω_1 с XP и XQ соответственно, а C и D — отличные от Y точки пересечения ω_2 с YP и YQ соответственно. Докажите, что $AB \parallel CD$.

4. За круглым столом сидят n штангистов. Сила каждого из них равна максимальному весу штанги, которую он поднимает. Каждый штангист выбрал натуральное число k и считает своими соседями k человек справа и k человек слева (если A считает B своим соседом, B не обязан считать A своим соседом). Самооценка штангиста равна доле более слабых штангистов, чем он сам, среди его соседей. Может ли средняя самооценка штангистов быть больше 0,8?

5. Докажите, что среди 17 точек на плоскости найдутся либо 5 точек общего положения, либо 9 на одной прямой.

6. Дан четырёхугольник $\mathcal{Q}_1$ такой, что середины его сторон лежат на одной окружности. Докажите, что существует вписанный четырёхугольник $\mathcal{Q}_2$ с двумя одинаковыми углами и с теми же сторонами, что и $\mathcal{Q}_1$.

7. Даны целые неотрицательные числа a, b и c, причём $ab \geqslant c^2$. Докажите, что найдётся натуральное n и целые $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, для которых $a = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$, $c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

8. Положительные действительные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют равенству
$$5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z.$$
Докажите, что
$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geqslant x + y + z.$$