

Финал. Гранд. 27.09.2026.

1. На плоскости отмечены $n \geq 3$ точек. Известно, что среди любых четырёх отмеченных точек найдутся две, расстояние между которыми не больше 1. Докажите, что можно выбрать три неотрицательных числа r , g и b с суммой 3 и раскрасить все отмеченные точки в красный, зелёный и синий цвета, чтобы расстояние между любыми двумя красными точками не превосходило r , расстояние между любыми двумя зелёными точками не превосходило g , а расстояние между любыми двумя синими точками не превосходило b .
2. Для нечётного натурального n нашлась такая перестановка $a_1, a_2, \dots, a_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, что для любых натуральных i и k таких, что $i < n$, $k \leq n - i$ и $k < n - 1$, среднее арифметическое чисел $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k}$ не является целым числом. Докажите, что число $n + 1$ является степенью двойки.
3. 60 школьников решали один и тот же список задач. Для любого набора, содержащего не более 5 задач, количество школьников, решивших весь этот набор, чётно. Докажите, что найдутся два школьника, решивших один и тот же набор задач.
4. Дан многочлен $P(x)$ степени 3 с целыми коэффициентами. Известно, что для любого простого p найдётся такое целое n , что числа $P(n)$, $P(n + 1)$ и $P(n + 2)$ делятся на p . Обязательно ли найдётся целое число k , для которого $P(k) = P(k + 1) = P(k + 2) = 0$?
5. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех вещественных x и y условию

$$\max(f(x + y), f(x - y)) = f(x) + |y|.$$
6. Найдите все тройки натуральных чисел (t, a, b) , для которых $t^{a+b} + 1$ делится на $t^a + t^b + 1$.
7. Изначально на доске нарисован конечный граф, являющийся деревом, выбрана одна из его вершин (*корень*) и все рёбра ориентированы в направлении от корня. За один ход в имеющемся графе можно выбрать различные вершины x, a, b, c такие, что все рёбра между ними — это в точности $x \rightarrow a$, $x \rightarrow b$, $x \rightarrow c$, стереть эти рёбра и вместо них нарисовать рёбра $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ и $c \rightarrow a$. Можно ли выбрать исходное дерево и корень в нём так, чтобы можно было совершать ходы бесконечно долго?
8. Дан остроугольный треугольник ABC . Точка M — середина стороны BC , а X и Y — проекции этой точки на стороны AB и AC соответственно. Точки Z и T выбраны на сторонах AB и AC соответственно так, что $AZ = BX$ и $CT = AY$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника MZT лежит на прямой MN , где N — точка пересечения высот треугольника ABC .
9. Человек и Компьютер играют на клетчатом квадрате 16×16 , у которого противоположные стороны склеены так, что получился тор (например, нижняя и верхняя клетки в одном столбце — соседние). Изначально Компьютер расставляет в некоторые клетки (хотя бы в одну, но не во все) по красной фишке, а затем Человек ставит на свободную клетку чёрную фишку и выбирает, кто из игроков (Человек или Компьютер) будет охотником, а кто — жертвой. Затем они делают ходы по очереди, начинает Компьютер. За ход игрок двигает ровно одну фишку своего цвета в соседнюю по стороне клетку (при этом в одной клетке могут оказаться несколько фишек). Если в какой-то момент игры в одной клетке оказываются фишки обоих цветов, охотник выигрывает. Если же этого не произошло, а одна и та же расстановка фишек повторилась 10 раз, выигрывает жертва. Кто выигрывает при правильной игре?
10. Окружность, вписанная в неравносторонний треугольник ABC , имеет центр I и касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Медианы треугольника пересекаются в точке S . Точки D' , E' и F' симметричны точкам D , E , F соответственно относительно прямой IS . Прямые AD' , BE' и CF' пересекают прямые BC , CA и AB в точках K , L и M соответственно. Точки K^* , L^* и M^* симметричны точкам K , L и M относительно середин сторон BC , CA и AB соответственно. Докажите, что прямые AK^* , BL^* и CM^* пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC .