

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026

Юниор–лига. Финал. 27.09.2026

1. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается стороны BC в точке D . Луч AI пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M . Точка K на прямой MD такова, что $KI \parallel BC$. Докажите, что $AK \perp BC$.

2. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^n - 1$ делится на произведение $(2^1 - 1)(2^2 - 1) \dots (2^{n-1} - 1)(2^n - 1)$.

3. Все клетки доски $n \times n$ (n – данное натуральное число) белые. Розовая пантера и Мистер Уайт ходят по очереди, начинает Розовая пантера. Каждым ходом Розовая пантера выбирает ряд (строку или столбец) и окрашивает все его клетки в розовый цвет (независимо от того, были ли они белыми или розовыми). Каждым своим ходом Мистер Уайт выбирает $n-1$ последовательных клеток в любом ряду (строке или столбце) и окрашивает их в белый цвет. Если после хода мистера Уайта по крайней мере k клеток окрашены в розовый цвет, Розовая пантера выигрывает. Найдите наибольшее значение k , при котором Розовая пантера может добиться выигрыша независимо от ходов мистера Уайта.

4. В треугольнике ABC точки D, E и F лежат на сторонах BC, AC и AB так, что $BD = DE = EA$ и $CD = DF = FA$. Прямые BE и CF пересекаются в точке P . Докажите, что ортоцентр треугольника PEF лежит на прямой BC .

5. На доске написаны числа $100^2, 101^2, 102^2, \dots, 200^2$. Каждую минуту Вася выбирает на доске два числа x и y , стирает их и записывает на доске число $2x + 2y$. Это продолжается до тех пор, пока не останется только одно число. Докажите, что это число не меньше 200 000 000.

6. В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$ для каждого натурального n положим

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Оказалось, что все числа $b_1, b_2, \dots$ натуральные и каждое натуральное число встречается среди них ровно один раз. Найдите все возможные последовательности (a_n) .

7. Найдите все тройки натуральных чисел (t, a, b) , для которых $t^{a+b} + 1$ делится на $t^a + t^b + 1$.

8. В графе G из любых 30 вершин можно выбрать 16 попарно несмежных. Докажите, что вершины G можно покрасить в 15 цветов правильным образом.