

1. Среди узлов квадратной решётки выбраны 5 точек. Могло ли оказаться так, что среди десяти попарных расстояний между ними восемь являются различными простыми числами?

2. Прямоугольник замощён P -пентамино двух зеркальных типов A и B . Фигурки разрешается поворачивать, но нельзя переворачивать. Известно, что фигурок типа A ровно две. Докажите, что они повернуты друг относительно друга на 180° .

3. Вершины $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$ расположены по кругу. Из каждой вершины выходят петля и ориентированное ребро в следующую по часовой стрелке вершину; одно из них красное, другое — синее. В каждой вершине стоит фишка. За один ход выбирают цвет, и все фишки одновременно перемещаются по выходящему ребру этого цвета. Сколько существует раскрасок, для которых некоторой последовательностью ходов можно собрать все фишки в одной вершине?

4. Пусть a, b, c — положительные действительные числа. Известно, что

$$(1 + ab)(1 + bc)(1 + ca) = (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

Докажите, что

$$\frac{1}{(1 + a + ab)^2} + \frac{1}{(1 + b + bc)^2} + \frac{1}{(1 + c + ca)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

5. Сколько существует таких пар простых чисел (p, q) , для которых $p^2 + 8p + 1$ делится на $3q$, а $q^2 - q$ делится на p ?

6. В треугольнике ABC проведены медианы BB' и CC' , пересекающиеся в точке M . На отрезках MB' и MC' выбраны соответственно точки X и Y так, что $AM = CX = BY$. Докажите, что $\angle BMC = \angle BYC' + \angle CXB'$.

7. Через центр I окружности, вписанной в треугольник ABC , проводится переменная прямая, пересекающая отрезки AB и BC в точках X и Y соответственно. Пусть P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AXI и CYI соответственно, а F — вторая (отличная от I) точка пересечения этих окружностей. Докажите, что всевозможные описанные окружности треугольников PQF проходят через фиксированную точку.

8. На доске написаны числа $100^2, 101^2, 102^2, \dots, 200^2$. Каждую минуту Вася выбирает на доске два числа x и y , стирает их и записывает число $2x + 2y$. Это продолжается до тех пор, пока на доске не останется только одно число. Докажите, что это число не меньше 200 000 000.