

XXI Южный математический турнир. ВДЦ "Орлёнок"
Командная олимпиада. Группа юниоров. 21.09.2026

1. Четыре квадрата разных размеров имеют стороны a , b , $b - a$ и $a + b$. Площадь наибольшего квадрата равна сумме площадей второго и третьего по размеру. Площадь наименьшего квадрата равна 4. Найдите стороны всех четырёх квадратов.

2. Пусть ABC – треугольник, у которого $\angle BAC = 84^\circ$. Пусть D – точка на стороне AB , такая, что $\angle BDC = 3\angle DCA$ и $DC = DB$. Найдите угол $\angle ABC$.

3. Каждое натуральное число окрашено в один из 100 цветов. Докажите, что существуют четыре числа $a < b < c < d$ одного цвета такие, что $a + d = b + c$.

4. Целые числа a , b и n таковы, что $b^2 - ab$ и a^2 делятся на n . Докажите, что b^4 также делится на n .

5. На олимпиаде было n задач. Максим решил больше задач, чем любой другой участник. Оказалось, однако, что, хотя можно найти 6 школьников, вместе решивших все задачи, составить такую шестёрку с участием Максима нельзя. При каком наименьшем n такое возможно?

6. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . На прямой DE выбраны точки P и Q таким образом, что $PC \perp BC$ и $QB \perp BC$. Пусть A_1 – точка, диаметрально противоположная точке A на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точка A_1 лежит на прямой, содержащей общую хорду описанных окружностей треугольников BDQ и CEP .

7. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите, что:

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| \leq \frac{1}{8}$$

8. Два игрока играют в следующую игру. Имеется пустой граф со 101 вершиной и k карандашей разных цветов. Первый игрок называет цвет, после чего второй игрок рисует ребро, которое ещё не было нарисовано, используя карандаш выбранного цвета. Затем первый игрок снова называет цвет, и второй игрок рисует ещё одно ребро, и так далее. Если в какой-то момент появится одноцветный цикл, игра заканчивается, и побеждает второй игрок. Если все ребра будут нарисованы, а одноцветный цикл не появится, то побеждает первый игрок. Определите максимальное значение k , при котором второй игрок может гарантированно выиграть.