

XXI Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига. Командная олимпиада. 21.09.2026

1. У Пина есть набор из 5 внешне одинаковых гирь массой 1 г, 3 г, 5 г, 7 г, 9 г. Он утверждает, что помнит массу каждой гири. Крош ему не верит. Сможет ли Пин провести одно взвешивание на чашечных весах так, чтобы доказать Крошу, что массы хотя бы двух гирь он помнит правильно?

2. Изначально во всех клетках таблицы 3×3 стояли нули. За ход разрешалось либо прибавить 1 ко всем трём числам некоторой строки, либо прибавить 2 ко всем трём числам некоторого столбца. После нескольких ходов полученную таблицу переписали на листок, допустив ошибку ровно в одной клетке. На листке оказалась таблица

8	2	6
10	6	8
7	1	5

Сколько ходов было сделано?

3. Целые числа a , b и натуральное число n таковы, что $b^2 - ab$ и a^2 делятся на n . Докажите, что b^4 также делится на n .

4. Сколько существует 15-значных натуральных чисел, первая цифра которых равна 7, а число, составленное из любых двух соседних цифр, является двузначным и делится на 12 или на 14?

5. Пусть a и b — действительные числа, причём $a > b$. Докажите, что

$$a^3 + a + 2b^2 > a^2b + 2ab + b.$$

6. По кругу расположены 20 точек $A_1, A_2, \dots, A_{20}$, каждая из которых окрашена в красный или зелёный цвет. Среди любых 9 последовательных по кругу точек не менее 4 зелёных, а среди любых 11 последовательных по кругу точек не более 5 зелёных. Сколько пар соседних точек окрашены в один цвет?

7. На олимпиаде было n задач. Максим решил больше задач, чем любой другой участник. Оказалось, однако, что, хотя можно найти 6 школьников, вместе решивших все задачи, составить такую шестёрку с участием Максима нельзя. При каком наименьшем n такое возможно?

8. В треугольнике ABC угол A равен 45° . Из вершины A проведена высота, разделившая сторону BC на отрезки длиной 2 и 3. Найдите длину этой высоты.